Ingreso UTN

Unidad III

Letras y números juntos:

1) Dados los polinomios

$$P(x) = x^2 - 4x + 4$$
$$Q(x) = 2x - 4$$

Calcule:

1.1) $P(x) + Q(x)$

Reemplazamos los correspondientes polinomios:

$$(x^2 - 4x + 4) + (2x - 4) = x^2 - 4x + 2x + 4 - 4$$
$$P(x) + Q(x) = x^2 - 2x$$

1.2) $P(x) - 2Q(x) = (x^2 - 4x + 4) - 2(2x - 4)$

$$P(x) - 2Q(x) = x^2 - 4x + 4 - 2.2x + 2.4$$
$$P(x) - 2Q(x) = x^2 - 8x + 12$$

1.3) $3.P(x).Q(x) = 3.(x^2 - 4x + 4).(2x - 4)$

$$3P(x)Q(x) = (3x^2 - 12x + 12)(2x - 4)$$
$$3.P(x)Q(x) = 6x^3 - 12x^2 - 24x^2 + 48x + 24x - 48$$

En el paso anterior, hay que hacer una distributiva entre todos los miembros de la multiplicación respetando los signos. Luego terminar la operación de sumas.

$$3P(x)Q(x) = 6x^3 - 36x^2 + 72x - 48$$

1.4)$P(x){:}\,Q(x)\quad x \neq 2$ En este caso de división no podemos utilizar la famosa regla de Ruffini, ya que nuestro divisor no tiene la forma: $x + a$ entonces hay que resolver con una división normal:

$$\begin{array}{cccl|cc}
x^2 & -4x & +4 & & 2x & -4 \\ \cline{5-6}
x^2 & -2x & & & \frac{1}{2}x & -1 \\ \cline{1-2}
0 & -2x & +4 & & & \\
 & -2x & +4 & & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & 0 & & &
\end{array}$$

Notar que al restar cambia el signo llegando al resultado correcto: $\frac{1}{2}x - 1$

1.5) $\left[Q(x)\right]^2=(2x-4)^2$

$(2x-4).(2x-4)=4x^2-8x-8x+16$

$Rta: 4x^2-16x+16$

1.6) $\left[P(x)\right]^2=\left(x^2-4x+4\right)^2$

$\left(x^2-4x+4\right).\left(x^2-4x+4\right)=x^4-4x^3+4x^2-4x^3+16x^2-16x+4x^2-16x+16$

$Rta: x^4-8x^3+24x^2-32x+16$

1.7) $\left[Q(x)\right]^3=\left[Q(x)\right]^2.Q(x)$

$\left(4x^2-16x+16\right).(2x-4)$

Acá, reemplazamos por el valor obtenido en el 1.5 para ahorrarnos repetir las mismas cuentas.

$8x^3-16x^2-32x^2+64x+32x-64=8x^3-48x^2+96x-64$

2) Determine los números opuestos h y k para que $P(x)=x^3-x^2+hx-k$ sea divisible por $Q(x)=x+2$

Para este ejercicio, hay que tener en cuenta que h y k no son variables, son un número constante a determinar. Y en este caso al Q ser de la forma $x+a$ se puede utilizar Ruffini. :D

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & h & -k \\ -2 & & -2 & 6 & -12-2h \\ \hline & 1 & -3 & 6+h & -k-12-2h \end{array}$$

Ahora para decir que P es divisible por Q el resto debe ser igual a 0.

En otras palabras, $-k-12-2h=0$

Además, el enunciado nos dice que h y k son opuestos. Esto quiere decir que $-k=h$

Con este nuevo dato, podemos reemplazarlo en la ecuación y quedarnos con $h-12-2h=-12-h=0$ despejamos $-h=12$ y ya teniendo h tenemos también $k=12$.

3) ¿Cuál es el resto de dividir $P(x)=3x^3+2x-4$ por $Q(x)=x+1$?

Usando otra vez Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & & -3 & 3 & -5 \\ \hline & 3 & -3 & 5 & -9 \end{array}$$

Llegamos a que el resto es -9 (Notar que este resto es un número no depende de x)

4) Determine el valor positivo de α para que: $P(x)=(\alpha-1)x^3-\alpha^2x^2+x-10$ tenga a -2 como raíz.

Aplicamos ruffini:
$$\begin{array}{c|cccc} & \alpha-1 & -\alpha^2 & 1 & -10 \\ 2 & & 2\alpha-2 & -2\alpha^2+4\alpha-4 & -4\alpha^2+8\alpha-6 \\ \hline & \alpha-1 & -\alpha^2+2\alpha-2 & -2\alpha^2+4\alpha-3 & -4\alpha^2+8\alpha-16 \end{array}$$

Para que -2 sea raíz el resto tiene que ser 0 entonces: $-4\alpha^2+8\alpha-16=0$
Al aplicar la formula resolvente, llegamos a una raíz negativa. Donde decimos que no tiene solución en $\mathbb{R}$

5) Halle el orden de multiplicidad de las raíces $x_1=1$ y $x_2=-2$ en $P(x)=x^6+x^5-5x^4-x^3+8x^2-4x$

Nos dan dos raíces y nos preguntan la multiplicidad. Podemos hallar una tercera raíz a simple vista, reemplazando $x=0$.

Entonces, quedaría: $x_1=1$ $x_2=-2$ $x_3=0$ tenemos tres raíces.

Una forma efectiva de hallar la multiplicidad de las raíces es aplicando Ruffini con cada raíz correspondiente. Empecemos con $x_1=1$

$$\frac{P(x)}{(x-1)}$$

Tenemos nuestro polinomio dividido x menos nuestra raíz. Ahora pasamos a aplicar Ruffini:
$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & -5 & -1 & 8 & -4 \\ 1 & & 1 & 2 & -3 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

Acordate que cuando usas Ruffini tenés que cambiarle el signo a ese -1.

Como esperábamos, nos quedo resto 0, esto quiere decir que efectivamente era una raíz. Ahora vamos a ver si esta raíz tiene alguna multiplicidad, entonces ahora vamos a volver a dividir, pero en vez de usar P(x) hay que usar el cociente obtenido del paso anterior, osea: $x^5+2x^4-3x^3-4x^2+4x$ y usamos de nuevo $x_1=1$
$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & -3 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 3 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

Otra vez obtenemos resto 0! Esto quiere decir que, por ahora, la raíz 1 tiene multiplicidad 2. Con el mismo procedimiento, veamos si tiene multiplicidad tres. Pero ahora hay que usar el nuevo cociente obtenido: x^4+3x^3-4x

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

Nuevamente, tenemos resto 0. Provablemente esta raíz no tenga mas multiplicidad. Pero para chequearlo repetimos el proceso:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 4 & 4 \\ 1 & & 1 & 5 \\ \hline & 1 & 5 & 9 \end{array}$$

Como era de esperarse, nos dio un resto $\neq 0$. Entonces podemos confirmar que $x_1 = 1$ tiene multiplicidad 3.

Ahora pasemos a la siguiente raíz: $x_2 = -2$ como vimos antes para ver la multiplicidad hay que al menos aplicar 2 veces Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & -5 & -1 & 8 & -4 \\ -2 & & -2 & 2 & 6 & -10 & 4 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 & 0 \end{array}$$

-2 es raíz.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & & -2 & 6 & -6 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \end{array}$$

La raíz tiene multiplicidad 2.

Ahora, tenemos 1 raíz con multiplicidad 3 otra raíz con multiplicidad 2, si las sumamos nos dan 5. Mas la que habíamos hallado antes reemplazando $x = 0$ nos da un total de 6. Que es el grado del polinomio. Por lo que podemos dar por terminado el ejercicio.

6) Halle el polinomio P(x) de grado mínimo y tal que:

a. Es reducido, tiene raíces simples en -1 y 3, y tiene una raíz doble 6.

Nos dan 4 raíces, entonces para que sea de grado mínimo, este tiene que ser 4.
Como tenemos las raíces podemos escribir estas con su grado de multiplicidad correspondiente:

$$(x+1).(x-3).(x-6)^2$$

$$\left(x^2-3x+x-3\right).\left(x^2-6x-6x-36\right)$$

Hacemos la última distributiva,

$$x^4-12x^3+36x^2-2x^3+24x^2-72x-3x^2+36x-108 = x^4-14x^3+57x^2-36x-108$$:D

b. Tiene raíces simples en 2 y -2, P(-1)=3

Con el mismo razonamiento que antes, al tener 2 raíces simples y ser de grado mínimo. Nos queda un polinomio cuadrático que al evaluarlo en $x=-1$ nos da 3.

$(-1).(x-2).(x+2)=-x^2+4$

7) Simplifique las siguientes expresiones:

a. $\frac{x^2-14x+49}{x^2-49}$, $|x|\neq 7$

$$\frac{x^2-14x+49}{x^2-49}=\frac{(x-7).(x-7)}{(x+7).(x-7)}=\frac{x-7}{x+7}$$

b. $\frac{y^3-1}{y-1}$, $y\neq 1$

$$\frac{y^3-1}{y-1}=\frac{(y+1).(y-1).(y+1)}{(y-1)}=y^2+y+1$$

c. $\frac{a^3+a^2+a+1}{a^2+a}$, $a\neq 0\wedge a\neq 1$

Recorda que este símbolo $\wedge$ cuenta como un "y"

$$\frac{a^3+a^2+a+1}{a^2+a}=\frac{(a^2+1).(a+1)}{a.(a+1)}=\frac{a^2+1}{a}$$

8)

a. Factorice el polinomio $P(x)=2x^3-3x^2-3x+2$

La teoría vista en los apuntes nos dice:

El polinomio P(x) factorizado queda expresado como el producto de su coeficiente principal que es 9 y por los factores (primos) mónicos de la forma $x-x_j$ (con j ∊ {1,2,3} siendo x_j las raíces de P(x)).

Si aplicamos esto a nuestro ejercicio, tenemos que hallar las raíces de nuestro polinomio. Para llegar a la forma: $2.(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3)$ donde x_1,x_2,x_3 son las raíces de nuestro polinomio. Si hacemos: $P(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2-3.-1+2=-2-3+3+2=0$ entonces -1 es raíz de P(x)

Para encontrar las otras raíces primero hacemos Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & -3 & 2 \\ -1 & & -2 & 5 & -2 \\ \hline & 2 & -5 & 2 & 0 \end{array}$$

Nos queda el cociente: $2x^2-5x+2$ que al ser una cuadrática podemos utilizar la formula resolvente para encontrar las raíces, que también van a ser raíces de P(x). Entonces solo queda escribir: $P(x)=2.(x+1).\left(x-\frac{1}{2}\right).(x-2)$

b. Dado el polinomio $P(x)=\frac{1}{k}x^2-5x+2k$, determine el valor no nulo de k, si se sabe que el doble de la suma de los ceros del polinomio es igual al producto de dichos ceros.

El doble de la suma de los ceros es igual al producto de dichos cero: $2.\left(x_1+x_2\right)=x_1.x_2$ las raíces tienen que cumplir esta ecuación. El 0 cumple la ecuación, pero no es raíz de P(x).

Usamos la fórmula de la resolvente: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4.\frac{1}{k}.2k}}{2.\frac{1}{k}}$$

Fijate que adentro de la raíz la k se simplifica!

$$\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4.\frac{1}{k}.2k}}{2.\frac{1}{k}}=\frac{5\pm\sqrt{25-8}}{2.\frac{1}{k}}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2.\frac{1}{k}}=\frac{k}{2}.\left(5\pm\sqrt{17}\right)=x_{1,2}$$

Ahora que ya tenemos nuestras 2 raíces las metemos en la ecuación del principio:

$$2.\left(\frac{k}{2}.\left(5+\sqrt{17}\right)+\frac{k}{2}.\left(5-\sqrt{17}\right)\right)=\left[\frac{k}{2}.\left(5+\sqrt{17}\right)\right].\left[\frac{k}{2}.\left(5-\sqrt{17}\right)\right]$$

En el primer termino se cancela el 2 que esta afuera con los que están adentro. Y después sacamos factor común k. Y del otro lado aplicamos distributiva con $k/2$.

$$k\left(5+\sqrt{17}+5-\sqrt{17}\right)=\left[\frac{5k}{2}+\frac{k}{2}\sqrt{17}\right].\left[\frac{5k}{2}-\frac{k}{2}\sqrt{17}\right]$$

Miralo tranquilo. Ahora, las raíces de la izquierda se nos simplifican y del otro lado volvemos a aplicar distributiva.

$$10k=\frac{25}{4}k^2-\frac{17}{4}k^2$$

Ahora dividimos todo por k para hacer esto hay que pedir que $k\neq 0$ y por suerte esto no interfiere con nuestro ejercicio y luego despejamos k:

$$10=2k\rightarrow k=5$$

Podes chequear este resultado reemplazando k en el polinomio y hallando las raíces que van a tener que cumplir dicha ecuación ya mencionada arriba.

c.

Determine los valores reales de a, b, α y β para que el polinomio $P(x)=x^3+6x^2+15x+14$ sea igual al polinomio $Q(x)=a\left(x+\alpha\right)^3+b\left(x+\beta\right)$

En $Q(x)$ hacemos distributiva y desarmamos esa potencia cubica:

$a\left(x+\alpha\right)^3+b\left(x+\beta\right)=a\left(x^3+\alpha^3+3\alpha x^2+3\alpha^2x\right)+bx+b\beta$ otra vez distributiva con la a y sumamos los términos:

$$ax^3+a\alpha^3+3a\alpha x^2+3a\alpha^2x+bx+b\beta=ax^3+3a\alpha x^2+x\left(3a\alpha^2+\beta\right)+\left(a\alpha^3+b\beta\right)$$

Fijate que ahora quedo ordenado y podemos igual miembro a miembro con el otro polinomio:

$ax^3+3a\alpha x^2+x\left(3a\alpha^2+\beta\right)+\left(a\alpha^3+b\beta\right)=x^3+6x^2+15x+14$ A x^3 solo lo esta multiplicando la a entonces solo hay un valor posible para a: $a=1$ reemplazamos:

$x^3+3\alpha x^2+x\left(3\alpha^2+\beta\right)+\left(\alpha^3+b\beta\right)=x^3+6x^2+15x+14$ Ahora miramos x^2 y deducimos:
$3\alpha=6\rightarrow\alpha=2$

Reemplazamos de nuevo:

$$x^3+6x^2+x\left(12+\beta\right)+\left(8+b\beta\right)=x^3+6x^2+15x+14$$

Y esta vez miramos a la x:
$12+\beta=15\rightarrow\beta=3$

Y, por último, b:
$8+3b=14\rightarrow b=2$

d. Determine el valor real de a, para que el resto de la división entre:
$$P(x)=-x^4+2x^2-\left(a-1\right)^2x+1$$

Y $b(x)=x+1$ sea igual a 11.

Dato: $-\left(a-1\right)^2=-a^2+2a-1$

Ruffini:

	-1	0	2	$-\left(a-1\right)^2$	1
-1		1	-1	-1	$+a^2-2a+2$
	-1	1	1	$-a^2+2a-2$	a^2-2a+3

Entonces, el resto obtenido que debe ser igualado a 11 es:
$$a^2-2a+3=11\rightarrow a^2-2a-8=0$$

Con la formula resolvente: $\begin{matrix} a_1 = 4 \\ a_2 = -2 \end{matrix}$

9)

a. Factorice el polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x$

$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 4x = x\left[x^3 + 2x^2 - 2x - 4\right] = 0$

Ya con esto sabemos que una raíz es 0. Veamos ahora la cubica que queda adentro:

$x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0 \rightarrow (-2)^3 + 2.(-2)^2 - 2.(-2) - 4 = -8 + 8 + 4 - 4 = 0$

Entonces, $x = -2$ es raíz.
También podemos hacer Ruffini para chequear esto:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -2 & -4 \\ -2 & & -2 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Como efectivamente sabíamos era raíz. Ahora nos quedo $x^2 + 0x - 2 = 0$

Como llegamos a una cuadrática, basta usar la resolvente para saber las dos raíces que nos faltan:
$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$

Ahora, escribimos P(x) como:

$P(x) = x.(x + 2).(x - \sqrt{2}).(x + \sqrt{2})$

b. Dado $P(x) = ax^3 + ax^2 + 7x + b$, determine los valores reales de a y b para que P(x) sea divisible por $Q(x) = x - 1$ y por $r(x) = x + 3$

Ruffini con Q(x)

$$\begin{array}{r|cccc} & a & a & 7 & b \\ 1 & & a & 2a & 2a+7 \\ \hline & a & 2a & 2a+7 & 2a+7+b \end{array}$$

Y nos queda: $2a + 7 + b = 0$ para que sea divisible.
Ruffini con r(x)

$$\begin{array}{r|cccc} & a & a & 7 & b \\ -3 & & -3a & 6a & -18a-21 \\ \hline & a & -2a & 6a+7 & -18a-21+b \end{array}$$

En este caso nos queda: $-18a - 21 + b = 0$ para que sea divisible.

Llegamos a 2 ecuaciones y 2 incógnitas. Planteamos un sistema:

$$\begin{cases} 2a+7+b=0 \\ -18a-21+b=0 \end{cases}$$

De la primera ecuación, despejamos b en función de a $\rightarrow b=-2a-7$ y reemplazamos en la 2º ecuación $\rightarrow -18a-21-2a-7=0$ despejamos a:

$$-20a=28 \rightarrow a=-\frac{7}{5}$$

Ahora reemplazamos este valor de a en la anterior ecuación de *b*:

$$b=-2.\left(-\frac{7}{5}\right)-7 \rightarrow b=-\frac{21}{5}$$

c. Halle el polinomio t(x) de grado mínimo sabiendo que $t(-2)=30$, 4 y -1/3 son raíces simples y -1 es raíz doble.

Escribimos las raíces con su grado de multiplicidad: $(x-4).\left(x-\left(-\frac{1}{3}\right)\right).(x+1)^2$

Usamos el otro dato $t(-2)=30$ y evaluamos el término anterior en -2:

$(-2-4).\left(-2+\frac{1}{3}\right).(-2+1)^2=-6.\left(-\frac{5}{3}\right).1=10$ que por suerte nos da 10. Entonces para que se cumpla solo hay que multiplicar por 3 (lo que significa que el termino principal, el que acompaña a la x de mayor grado, es un 3)

Llegando a $t(x)=3(x-4).\left(x-\left(-\frac{1}{3}\right)\right).(x+1)^2$

10) Reduzca a la mínima expresión:

$$\left(\frac{1}{y}-\frac{3}{1-y^2}+\frac{2}{1-y}+\frac{1}{y+1}\right):\frac{1}{-y^2-y},(y\neq 0,|y|\neq 1)$$

Usando propiedades de fracciones podemos escribirlo como una multiplicación:

$\left(\frac{1}{y}-\frac{3}{1-y^2}+\frac{2}{1-y}+\frac{1}{y+1}\right).\frac{-y^2-y}{1}$ Sacamos factor común adentro del paréntesis y hacemos las sumas y restas:

$$\left(\frac{1}{y}-\frac{3}{1-y^2}+\frac{2}{1-y}+\frac{1}{y+1}\right)=\left(\frac{(1-y^2).(1-y).(y+1)-3y.(1-y).(y+1)+2y.(1-y^2).(y+1)+y.(1-y^2).(1-y)}{y.(1-y^2).(1-y).(y+1)}\right)$$

Fijate que se puede simplificar ese $1-y^2$ de todos los términos ya que $(1-y).(y+1)=1-y^2$

Entonces nos quedaría algo así:

$$\left(\frac{(1-y^2)-3y+2y.(y+1)+y.(1-y)}{y.(1-y).(y+1)}\right).(-y^2-y)=\left(\frac{(1-y).(y+1)-3y+2y.(y+1)+y.(1-y)}{y.(1-y).(y+1)}\right).(-y.(y+1))$$

$$\left(\frac{(1-y^2)-3y+2y.(y+1)+y.(1-y)}{(1-y)}\right).(-1)=-\frac{1-y^2-3y+2y^2+2y+y-y^2}{1-y}$$

Resolvemos lo del numerador y nos queda: $-\dfrac{1}{1-y}$

11) Determine los valores de *A*, *B* y *C* para que se verifiquen las siguientes igualdades.

a. $\dfrac{3x-1}{(x+2).(x-3)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-3}$

Hacemos la suma de lado derecho:

$\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-3}=\dfrac{A.(x-3)+B(x+2)}{(x+2).(x-3)}=\dfrac{Ax-3A+Bx+2B}{(x+2).(x-3)}$ Como ahora tenemos denominadores iguales solo hay que igualar los numeradores!

$$Ax-3A+Bx+2B=3x-1\rightarrow x.(A+B)-3A+2B=3x-1$$

Igualamos los componentes y quedamos con un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases}A+B=3\\-3A+2B=-1\end{cases}$$

De la primera ecuación, despejamos A en función de B $A=3-B$ reemplazamos en la otra ecuación:

$-3.(3-B)+2B=-1$ despejamos B $-9+3B+2B=-1\rightarrow B=\dfrac{8}{5}$

Ahora, reemplazamos B en la ecuación de A: $A=3-\dfrac{8}{5}\rightarrow A=\dfrac{7}{5}$

b. $\dfrac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x-3}$

Mismo procedimiento que en el ejercicio anterior.

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}=\frac{A.(x+1).(x-3)+B.x.(x-3)+C.x.(x+1)}{x.(x+1).(x-3)}$$

$$\frac{A.(x^2-2x-3)+B(x^2-3x)+C(x^2+x)}{x^3-2x^2-3x}=\frac{Ax^2-2Ax-3A+Bx^2-3Bx+Cx^2+Cx}{x^3-2x^2-3x}$$

$$\frac{x^2.(A+B+C)+x(-2A-3B+C)-3A}{x^3-2x^2-3x}=\frac{5x+3}{x^3-2x^2-3x}$$

Nuevamente igualamos miembro a miembro.

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -2A-3B+C=5 \\ -3A=3 \end{cases}$$

Sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas. $A=-1$, $-1+B+C=0 \rightarrow C=1-B$

$-2.-1-3B+1-B=5 \rightarrow B=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$ y con B y A sacamos C: $C=1--\frac{1}{2} \rightarrow C=\frac{3}{2}$

c. $\frac{3x^2-8x+13}{(x+3).(x-1)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$

Mismo procedimiento que en el anterior!

$$\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A.(x-1)^2+B.(x+3).(x-1)+C.(x+3)}{(x+3).(x-1)^2}$$

$$\frac{Ax^2-2Ax+A+Bx^2+2Bx-3B+Cx+3C}{(x+3).(x-1)^2}=\frac{x^2.(A+B)+x(-2A+2B+C)+A-3B+3C}{(x+3).(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-8x+13}{(x+3).(x-1)^2}=\frac{x^2.(A+B)+x(-2A+2B+C)+A-3B+3C}{(x+3).(x-1)^2}$$

Igualamos miembro a miembro:

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A+2B+C=-8 \quad A=3-B \ , \quad -6+2B+2B+C=-8 \rightarrow C=-2-4B \\ A-3B+3C=13 \end{cases}$$

$3-B-3B-6-12B=13$ despejo, $-16B-3=13 \rightarrow B=-1$ reemplazo: $C=-2-4.-1 \rightarrow C=2$
$A=4$

d. $\frac{1}{(x^2+1).(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}$

Seguimos con el mismo procedimiento:

$$\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+B).(x-1)+Cx^2+C}{(x^2+1).(x+1)}=\frac{Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2+C}{(x^2+1).(x+1)}$$

En este caso, el numerador es 1. Entonces toda la suma de las x y las x^2 tienen que dar 0 y los independientes 1.

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B=0 \quad B=A, \ C=1+A, \quad A+1+A=0 \rightarrow A=-\frac{1}{2} \ , \ B=-\frac{1}{2} \ , \ C=\frac{1}{2} \\ -B+C=1 \end{cases}$$

12) Sea $P(x)=x^4-6x^3+8x^2+(h+k)x-(h-k)$

a. Calcule h y k sabiendo que 3 es raíz doble.

Como nos dan una raíz doble hacemos dos veces Ruffini con esa raíz:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -6 & 8 & (h+k) & -h+k \\ 3 & & 3 & -9 & -3 & -9+3h+3k \\ \hline & 1 & -3 & -1 & -3+h+k & -9+2h+4k \end{array}$$

Como es raíz, $-9+2h+4k=0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & -1 & -3+h+k \\ 3 & & 3 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & -6+h+k \end{array}$$

Como es raíz, $-6+h+k=0$ quedando un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -9+2h+4k=0 \\ -6+h+k=0 \end{cases} \rightarrow h=6-k \;,\; -9+12-2k+4k=0 \rightarrow k=-\frac{3}{2} \;,\; h=\frac{15}{2}$$

b. Factorice a P(x) en función de sus raíces suponiendo $h=\frac{15}{2}$ y $k=-\frac{3}{2}$

Como h y k tienen los valores del ejercicio anterior se deduce que 3 es raíz doble! Entonces, hay que seguir con Ruffini y hallar la raíz del polinomio que nos dejó: $x^2+0x-1=0$ Como es una cuadrática simple, podemos saber que las raíces son: $x_1=1, x_2=-1$(de ser un polinomio más complicado deberíamos haber seguido usando Ruffini).

Entonces, podes escribir a P(x) como $P(x)=(x-1).(x+1).(x-3)^2$

c. Calcule h y k sabiendo que $P(-1)=14$ y $P(-2)=80$. En este caso, lo que hay que hacer es reemplazar los valores de x, en los dos casos (-1 y -2) y luego armar un sistema de ecuación con dos incógnitas.

$$P(-2)=16+48+32-2h-2k-h+k=96-3h-k=80$$
$$P(-1)=1+6+8-h-k-h+k=15-2h=14 \rightarrow h=\frac{1}{2} \text{ y } 96-\frac{3}{2}-k=80 \rightarrow k=\frac{29}{2}$$

d. Obtenga el cociente y el resto de dividir P(x) por $Q(x)=x-3$, suponiendo $h=k=1$

Primero, reemplazamos k y h: $P(x)=x^4-6x^3+8x^2+2x$. Ahora, usamos Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -6 & 8 & 2 & 0 \\ 3 & & 3 & -9 & -3 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & -1 & -3 \end{array}$$

Entonces, $C(x)=x^3-3x^2-x-1$ y $r(x)=-3$

13) Halle el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a. $x^2+10x+\frac{25}{2}=0$ Recordemos la formula resolvente: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$

Reemplazamos: $x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4.1.\frac{25}{2}}}{2.1}$ y resolvemos

$$x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{50}}{2}\rightarrow x_{1,2}=-5\pm\frac{\sqrt{25.2}}{2}\rightarrow x_{1,2}=-5\pm\frac{\sqrt{25}}{2}.\sqrt{2}$$

Escribiendo la solución, $S=\left\{-5+\frac{5}{2}\sqrt{2},-5-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right\}$

b. $3x^2-30x-33=0$ Mismo procedimiento que en el anterior.

c.

$$x_{1,2}=\frac{30\pm\sqrt{900-4.3.(-33)}}{2.3}=\frac{30\pm\sqrt{1296}}{6}\rightarrow x_{1,2}=\frac{30\pm 36}{6}$$

$S=\{-1,11\}$

d. $-5.(x-3).(x-1)=0$

Fijate que en este caso te lo escriben factorizado. Entonces no es necesario usar la fórmula de los ejercicios anteriores. Basta con ver $x-3=0$ y $x-1=0$ en estos 2 casos si $x=3$ o $x=1$ se cumple la igualdad! Entonces nuestra solución es $S=\{1,3\}$

14) Sea la ecuación $ax^2+bx+c=0,(a\neq 0)$ con raíces: $x_1\in\mathbb{R},x_2\in\mathbb{R}$, equivalente a la ecuación:

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ Pruebe las siguientes propiedades de las raíces:

a. $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ Recordamos la formula resolvente, pero evaluada para este caso:

$$x_1=\frac{-\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}}}{2},x_2=\frac{-\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}}}{2}$$ entonces:

$$x_1+x_2=\frac{-\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}}}{2}+\frac{-\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}}}{2}$$

$$-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}}}{2}-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}}}{2}=-\frac{b}{2a}-\frac{b}{2a}=-\frac{b}{a}$$ Y con eso queda probada.

b. $x_1.x_2=\frac{c}{a}$ Ahora en vez de sumar las raíces con la resolvente, las multiplicamos:

$$x_1.x_2=\left(-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}}}{2}\right).\left(-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}}}{2}\right)=\frac{b^2}{4a^2}+\frac{b.\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}}}{4a}-\frac{b.\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}}}{4a}-\left(\frac{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}}}{2}\right)^2$$

$$\frac{b^2}{4a^2}-\frac{\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}}{4}=\frac{b^2-a^2.\left(\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}\right)}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4a^2\frac{c}{a}}{4a^2}=\frac{4a^2\frac{c}{a}}{4a^2}=\frac{c}{a}$$ y con eso queda probado.

15) Determine dos números tales que su suma sea s y su producto p.

a. $s=2\wedge p=20$ Según el enunciado: $\begin{matrix}x+y=2\\x.y=20\end{matrix}$ tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

Como siempre, despejamos x en función de y y luego reemplazamos: $x=2-y$,
$(2-y).y=20\rightarrow -y^2+2y-20=0$ resolvemos la cuadrática y vemos cuánto vale x e y:
Si te fijas, cuando usas la formula resolvente para esta ecuación, llegas a la raíz de un número negativo. Por lo tanto decimos que esa ecuación no tiene solución dentro del conjunto de los $\mathbb{R}$.

b. $s=12\wedge p=-64$ Según el enunciado: $\begin{matrix}x+y=12\\x.y=-64\end{matrix}$ otro sistema de ecuaciones.

$y=12-x$, $x.(12-x)=-64\rightarrow -x^2+12x+64=0$ veamos si esta cuadrática si se puede resolver:
$x_1=-4, x_2=16$ Osea que tendríamos dos valores posibles para y: $y_1=16, y_2=-4$.

16) Determine el valor real de k, tal que:

a. $5kx^2-(2k+10)x+4=0$ tenga raíz doble. Que tenga raíz doble quiere decir que: $x_1=x_2$
Entonces solo hay que usar la formula resolvente, e igualar.

$$x_{1,2}=\frac{2k+10\pm\sqrt{(4k^2+40k+100)-16.5k}}{10k}=\frac{2k}{10k}+1\pm\frac{\sqrt{4k^2-40k+100}}{10k}$$

$$x_1=x_2=\frac{2}{10}+1+\frac{\sqrt{4k^2-40k+100}}{10k}=\frac{2}{10}+1-\frac{\sqrt{4k^2-40k+100}}{10k}$$

Entonces, para que se cumpla la igualdad: $\frac{\sqrt{4k^2-40k+100}}{10k}=-\frac{\sqrt{4k^2-40k+100}}{10k}$ en otras palabras que "$a=-a$" y esta ecuación la cumple (en los reales) solo el número 0. Entonces basta con igualar el numerador a 0.
$\sqrt{4k^2-40k+100}=0\rightarrow k=5$

b. $3x^2+kx-2=0$ tenga una raíz igual a (-2). Este caso se puede resolver más fácil reemplazando x=-2:

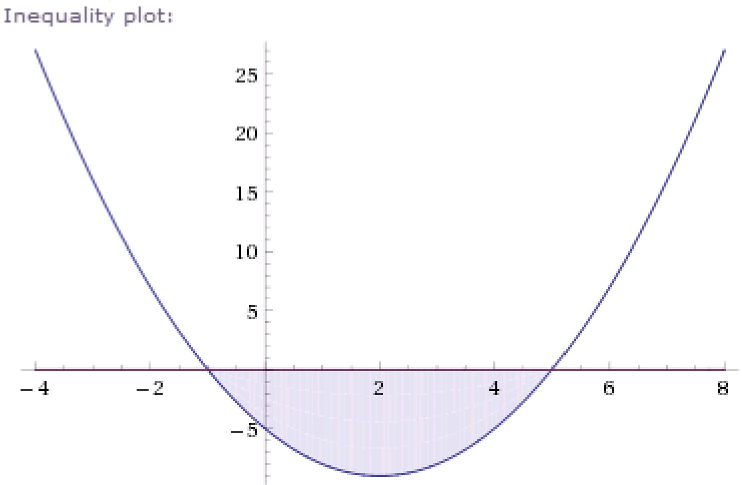
$$3(-2)^2 - 2k - 2 = 0 \rightarrow 12 - 2k - 2 = 0 \rightarrow k = 5$$

17) Halle el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

Para este tipo de ejercicios, es fundamental graficar, aunque sea únicamente para verificar la solución hallada.

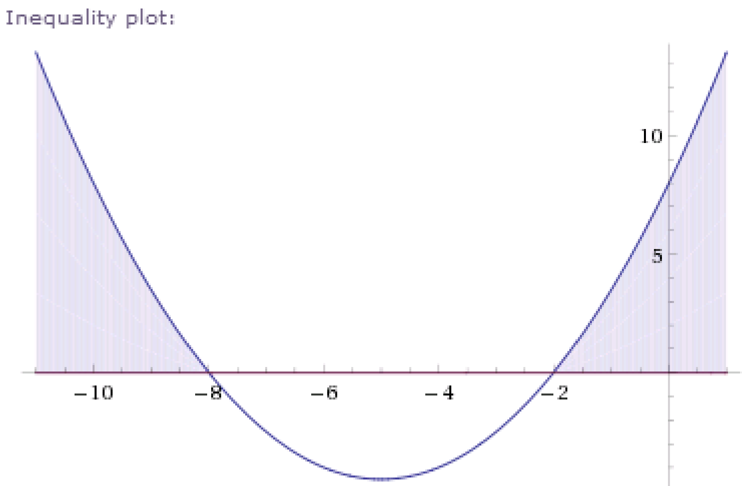
a. $x^2 - 4x < 5$

Para graficar esta función, es más fácil escribirla $x^2 - 4x - 5 < 0$



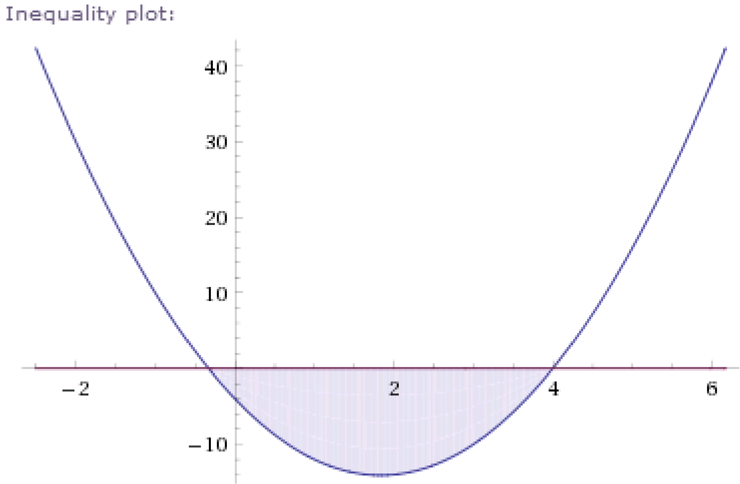
Como se puede apreciar en el gráfico, el conjunto solución es: $S = (-1, 5)$

b. $\frac{1}{2}x^2 + 5x + 8 \geq 0$



En este caso se aprecia: $S = (-\infty, 8] \cup [-2, +\infty)$ Notar que van corchetes, ya que la ecuación cumple la igualdad.

c. $3x^2 - 11x - 4 \leq 0$



Quizá en este caso cueste un poco más darse cuenta el punto de intersección con el eje x.
Procedemos a averiguarlo analíticamente: $3x^2 - 11x - 4 = 0$. Para eso, igualamos a 0 y usamos la formula resolvente para encontrar los ceros: $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 4$

Entonces, nuestro conjunto solución será $S = \left[-\frac{1}{3}, 4 \right]$.

18) Una vieja máquina puede hacer un trabajo en 6 horas... **[Resuelto en la guía]**

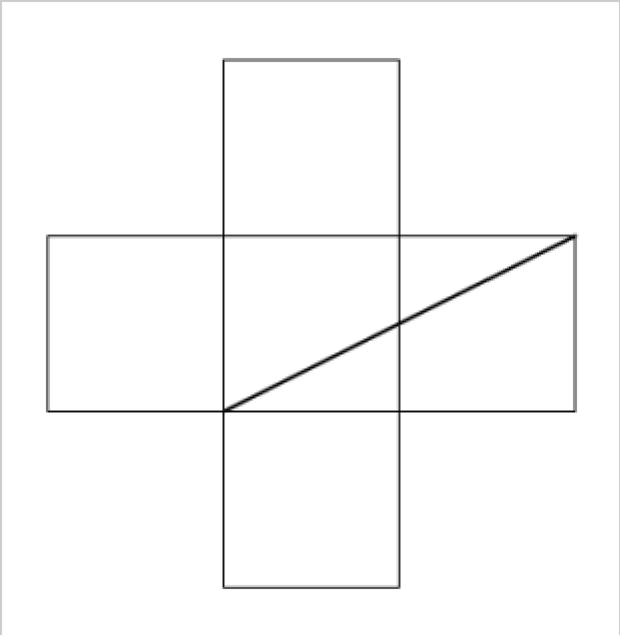
19) Es una cabaña el agua se bombea y se guarda en un gran depósito…

Maquina 1 tarda $6h$. Maquina 2 tarda $9h$.
En otras palabras cada máquina llena $1/6$ y $1/9$ partes del depósito por hora. Ahora, sumemos para ver cuánto hacen las 2 máquinas juntas por hora: $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$. Entonces, $5.x = 18 \rightarrow x = 3,6h$
Lo que hicimos fue ver cual era la producción por hora. Para luego ver cuantas horas necesitábamos para llenar el depósito. Osea llegar a 1.

20) Un grupo de estudiantes alquiló un micro en $\$80$… **[Resuelto en la guía]**

21) Hay un estandarte de $4dm\ x\ 3dm$…

Como bien dice el enunciado, la cruz se extiende de lado a lado. Ahora para calcular el área de la cruz podemos decir que es 4dm por el ancho de la cruz más 3dm por el ancho de la cruz menos el área del centro de la cruz, si no estaríamos contando 2 veces esta parte. Y al ancho de la cruz lo llamamos x.
Para guiarte un poco mira esta imagen:



Y recorda que la cruz va de lado a lado.

Ahora escribimos la ecuación que queda: $4x+3x-x^2=\frac{4.3}{2}$ reordenamos para que quede una cuadrática: $-x^2+7x-6=0 \rightarrow x_1=1, x_2=6$

Por lo tanto, el ancho de la cruz es 1dm ya que 6 excede las dimensiones del estandarte.

22) En dos clavos tenemos 156 posibilidades de colgar n cuadros. ¿Cuántos cuadros hay?
Supongamos que hay n cuadros, entonces en el primer cuadro puedo colocar n cuadros, mientras que en el segundo clavo solo van a quedar (n-1) cuadros, hay uno que está colgado en el otro clavo. Entonces si tomamos todas las opciones con los 2 clavos llegamos a: $n.(n-1)=156$ y a partir de acá solo queda despejar y resolver la cuadrática: $n^2-n-156=0 \rightarrow n_1=13, n_2=-12$ Como no puede haber cuadros negativos, la cantidad correcta de cuadros es 13.

23) Determine tres números enteros positivos y…

En lenguaje matemático: $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=365 \rightarrow 3x^2+6x-360=0$
Con la formula resolvente, hallamos las raíces: $x_1=10, x_2=-12$ descartamos el valor negativo. Y nos quedamos con: $S=\{10,11,12\}$

24) ¿De cuántos lados se compone un polígono…

Para este ejercicio, vamos a necesitar conocer la fórmula: $D=(n-3).\left(\frac{n}{2}\right)$ donde D son el número de diagonales y n el número de lados. Como conocemos D solo basta con despejar y resolver otra cuadrática: $2D=(n-3).n \rightarrow 180=n^2-3n \rightarrow n^2-3n-180=0 \rightarrow n_1=15, n_2=-12$ Como un polígono no puede cantidad de lados negativos, la respuesta correcta es 15 lados.

25) Un círculo tiene 20cm de radio…

Primero hallamos el área del primer círculo: $A = \pi.r^2 \to A = 400\pi cm^2$ Le restamos esos 76π que nos dice el enunciado y tenemos una nueva ecuación con incógnita al radio deseado:

$\pi.r^2 = 324\pi cm^2 \to |r| = \sqrt{324cm^2} \to r = 18cm$

26) La base mayor de un trapecio mide 50cm…

Primero recordemos la fórmula del área del trapecio: $A = \frac{a+c}{2}.h$ donde a es la base mayor, c es la base menor y h la altura. Reemplazamos y despejamos:

$1200cm^2 = \frac{50cm+h}{2}.h \to \left(\frac{50cm}{2}+\frac{h}{2}\right).h - 1200cm^2 = 0$ distribuimos y nos va a quedar una cuadrática: $25cm.h + \frac{h^2}{2} - 1200cm^2 = 0$

Nos olvidamos de las unidades por 1 segundo. Y aplicamos la ya famosa formula resolvente:

$h_1 = 30, h_2 = -80$ al estar trabajando con longitudes, descartamos el valor negativo. Podes chequear que h=30 cumple con la ecuación.

27) La altura (a) m alcanzada por un objeto, lanzada en tiro vertical es…

a. $a = 0m$ escribimos la ecuación: $20t - 5t^2 = 0$ con la resolvente llegamos a: $t = 4s$

b. $a = \frac{75}{4}m$ escribimos la ecuación: $20t - 5t^2 = \frac{75}{4} \to -5t^2 + 20t - \frac{75}{4} = 0$

Con la resolvente llegamos a los valores: $t_1 = 1,2s \wedge t_2 = 2,5s$

c. $a = 15m$, $20t - 5t^2 = 15 \to -5t^2 + 20t - 15 = 0$ con la resolvente:

$t_1 = 1s \wedge t_2 = 3s$

28) El piso de una sala tiene 1500 mosaicos…

El área de cada mosaico es x^2. Entonces, el área de todos los mosaicos es: $1500x^2$

Hacemos el mismo razonamiento pero ahora estos mosaicos tienen 5 cm más en cada lado, en otras palabras el área de estos es: $960.(x+5)^2$. Como ambos conjuntos de mosaicos cubren el mismo área. Es correcto decir que son iguales las áreas totales. $1500x^2 = 960.(x+5)^2$

$1500x^2 = 960x^2 + 9600x + 24000 \to 540x^2 - 9600x - 24000 = 0$ otra vez aplicamos la resolvente: $x = 20$

29) Una canilla puede llenar un tanque en 3 horas…

Según el enunciado: $\frac{1}{a}$ donde a es el tiempo total que tardaría la canilla en llenar el tanque y por otro lado sabemos que $\frac{1}{a-3}$ va a corresponder a la canilla que llena en 3 horas menos.

Y el último dato: $4.\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a-3}\right) = 1$ que las 2 canillas juntas tardar 4 horas en llenarla.

Resolvemos: $\frac{4}{a}+\frac{4}{a-3} = 1 \to \frac{4.(a-3)+4a}{a.(a-3)} = 1 \to \frac{4a-12+4a}{a^2-3a} = 1 \to 8a - 12 = a^2 - 3a$

Despejamos la cuadrática y usamos formula resolvente:

$-a^2+11a-12=0 \rightarrow a_1=1.228, a_2=9.77$ El primer valor hay que descartarlo ya que si hacemos a-3 quedaría que la otra canilla tiene tiempo negativo. La respuesta correcta es 9.77 horas y 6.77 horas.

30) Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

a. $\frac{6-x}{x^2+4x+4}-\frac{1}{x+2}=\frac{2}{5-x}$

Observar que: $x^2+4x+4=(x+2)^2$ luego pasar restando el termino de la derecha y sacar denominador común:

$$\frac{6-x}{(x+2)^2}-\frac{1}{x+2}-\frac{2}{5-x}=0 \rightarrow \frac{(6-x).(5-x)-(x+2).(5-x)-2.(x+2)^2}{(x+2)^2.(5-x)}=0$$

Para que se cumpla la ecuación basta probar que el numerador es igual a 0.

$$(6-x).(5-x)-(x+2).(5-x)-2.(x+2)^2=0 \rightarrow 30+x^2-11x+x^2-3x-10-2x^2-8x-8=0$$

$$-22x+12=0 \rightarrow 22x=12 \rightarrow x=\frac{12}{22}=\frac{6}{11}$$

Notar que x tiene que cumplir: $x \neq -2 \wedge x \neq 5$ ya que no se puede dividir por 0.

b. $\frac{x+4}{3x-6}-\frac{x-6}{4x-8}=\frac{x+1}{x-2}$

Mecanismo igual al ejercicio anterior:

$$\frac{x+4}{3.(x-2)}-\frac{x-6}{4.(x-2)}-\frac{x+1}{x-2}=0 \rightarrow \frac{4.(x+4)-3.(x-6)-12.(x+1)}{12.(x-2)}=0$$

Acá, nuevamente solo basta con igualar el numerador a 0 y pedir $x \neq 2$

$$4.(x+4)-3.(x-6)-12.(x+1)=0 \rightarrow 4x+16-3x+18-12x-12=0$$

$$-11x+22=0 \rightarrow 11x=22 \rightarrow x=\frac{22}{11} \rightarrow x=2$$

Pero espera! Por qué antes pedimos que x sea distinto de -2. Entonces no hay solución y escribimos: $S=\phi$

c. $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+\frac{x+1}{x-1}=6$ Igual que los anteriores: .

$$\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}+\frac{x+1}{x-1}-6=0 \rightarrow \frac{(x+1)^2+(x-1).(x+1)-6(x-1)^2}{(x-1)^2}=0$$

En este caso, pedimos $x \neq 1$

$$(x+1)^2+(x-1).(x+1)-6(x-1)^2=0 \rightarrow x^2+2x+1+x^2-1-6x^2+12x-6=0$$

$$-4x^2+14x-6=0 \to x_1=\frac{1}{2}, x_2=3$$

31) Determine el conjunto solución de:

a. $\sqrt{2+\sqrt{x}}+\sqrt{2-\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

Para deshacernos de las raíces elevamos los 2 miembros al cuadrado:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{x}}+\sqrt{2-\sqrt{x}}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2$$

Resolvemos esos cuadrados, nota que del lado izquierdo hay que hacer una distributiva:

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{x}}\right)^2+2.\left[\left(\sqrt{2+\sqrt{x}}\right).\left(\sqrt{2-\sqrt{x}}\right)\right]\left(\sqrt{2-\sqrt{x}}\right)^2=x$$

$$2+\sqrt{x}+2\left[\sqrt{\left(2+\sqrt{x}\right).\left(2-\sqrt{x}\right)}\right]+2-\sqrt{x}=x \to 4+2.\left[\sqrt{4-x}\right]=x \to 2\sqrt{4-x}=x-4$$

Volvemos a elevar al cuadrado ambos términos:

$$4.(4-x)=(x-4)^2 \to x^2-8x+16-16+4x=0$$

Y con la resolvente llegamos a: $x_1=0, x_2=4$

El 0 no cumple la primera ecuación así que lo descartamos. Y la respuesta correcta es: $S=\{4\}$

b. $\sqrt{6x+7}-\sqrt{3x+3}=1$

Elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$\left(\sqrt{6x+7}-\sqrt{3x+3}\right)^2=1^2 \to 6x+7-2.\left(\sqrt{6x+7}.\sqrt{3x-3}\right)+3x+3=1$$

$$-2.\left(\sqrt{(6x+7).(3x-3)}\right)=1-9x-10 \to -2\sqrt{18x^2+18x+21x+21}=-9x-9$$

Volvemos a elevar ambos miembros al cuadrado:

$$\left(-2\sqrt{18x^2+18x+21x+21}\right)^2=\left[-9(x-1)\right]^2$$

$$4.\left(18x^2+39x+21\right)=81x^2+162x+81 \to 9x^2+6x-3=0$$

Con la resolvente llegamos a:

$$x_1=\frac{1}{3}, x_2=-1$$

Entonces, nuestra solución es: $S=\left\{\frac{1}{3},-1\right\}$

c. $\sqrt{x+\sqrt{x^2+9}}=\sqrt{x+5}$ Para sacar las raíces elevamos los 2 miembros al cuadrado:

$\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2+9}}\right)^2=\left(\sqrt{x+5}\right)^2 \to x+\sqrt{x^2+9}=x+5 \to \sqrt{x^2+9}=5$ Restamos x de ambos lados y de nuevo elevamos al cuadrado para despejar x: $\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2=5^2 \to x^2+9=25 \to x^2-16=0$

Y por último con la formula resolvente llegamos a: $x_1 = 4, x_2 = -4 \to S = \{4, -4\}$

32) A un cuadro de óleo de 1,5m de largo por 90cm=0,9m de alto…

Como al cuadro se le agrega un marco, este agrega un espesor en cada lado. Esto se traduce en la fórmula del área como: $(b+2x).(h+2x) = A$ reemplazando por los datos:

$(1,5+2x).(0,9+2x) = 1,6 \to 1,35+1,8x+3x+4x^2-1,6=0 \to 4x^2+4,8x-\frac{1}{4}=0$

Con la resolvente llegamos a: $x_1 = -1,25m, x_2 = 0,05m$ descartamos el valor negativo y la respuesta correcta es 5cm

33) En un campeonato de ajedrez cada maestro juega una vez…

Supongamos que hay 6 jugadores, como cada uno juega una vez con el resto. El todos juegan 5 partidos. Ahora veamos:
El jugador 1 juega contra los otros 5. El jugador 2 juega contra el resto (notar que el jugador 2 ya jugo contra el jugador 1) entonces el jugador 2 juega 4 partidos. Ahora el jugador 3 juega contra el 4, 5 y el 6 ya que ya jugo contra el 1 y el 2. El jugador 4 le queda jugar contra el 5y el 6. Y por último, el jugador 5 juega contra el 6.
En total se jugaron $5+4+3+2+1=15$ partidos.
Ahora pensemos que hay 10 jugadores. Siguiendo el mismo razonamiento tenemos:
$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$
Entonces, hay 10 jugadores en el torneo.

34) Un estanciero vendió cierto número de reses…

Digamos que $\frac{1200}{x}$ es el precio por unidad. $(x-3)$ es la cantidad de reses.

Y $\frac{1200}{x}+20$ es el precio por unidad con las 3 reses menos. Planteamos la siguiente ecuación:

[Cantidad].[Precio por unidad]=1200 $(x-3).\left(\frac{1200}{x}+20\right)=1200$

Resolvemos:

$1200+20x-\frac{3600}{x}-60=1200 \to 20x-\frac{3600}{x}-60=0$ Multiplicamos por x y resolvemos la cuadrática: $20x^2-60x-3600=0 \to x_1=15, x_2=-12$

Entonces, 15 es el número de reses total.

Y $\frac{1200}{x}=\frac{1200}{15}=80$ es el precio por unidad.

35) Un hombre al morir deja un herencia de $60.000…

Usando el mismo razonamiento que en el ejercicio anterior:

$(x-2).\left(\frac{60000}{x}+1000\right)=60000$

Donde $(x-2)$ es el número de herederos descontando los ausentes.

$\left(\frac{60000}{x}+1000\right)$ es el monto heredado por cada uno.

$$1000x-\frac{120000}{x}+58000=60000\rightarrow 1000x^2-2000x-120000=0$$

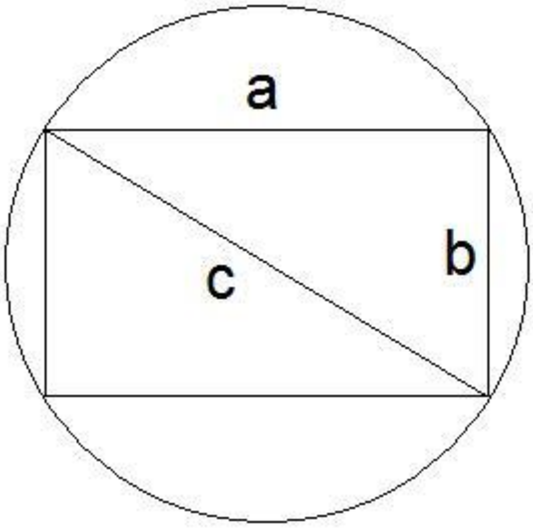
Resolvemos la cuadrática:

$x_1=12, x_2=-10$

Entonces, el número de herederos es 12.

36) Un rectángulo está inscripto en una circunferencia…

Esta imagen te va a ayudar a entender que es un rectángulo inscripto en una circunferencia:



Donde C es el diámetro de la circunferencia $(10cm)$, a y b son los lados del rectángulo. Con esto aclarado, solo hay que recordar Pitágoras para plantear nuestro sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} b.a=40cm^2 \\ b^2+a^2=c^2 \end{cases}$$

Despejamos a en función de b: $a=\frac{40}{b}$ y reemplazamos:

$$b^2+\left(\frac{40}{b}\right)^2=10^2\rightarrow b^2+\frac{1600}{b^2}-100=0$$

Multiplicamos por b^2

$$b^4+1600-100b^2=0$$

Y ahora hacemos una sustitución para poder resolver: $b^2=x\rightarrow b=\sqrt{x}$

$x^2+1600-100x=0$ Con la formula resolvente llegamos a: $x_1=80, x_2=20$

Volvemos atrás con la sustitución: $b_1=\sqrt{80}=\sqrt{16.5}=4\sqrt{5}, b_2=\sqrt{20}=\sqrt{4.5}=2\sqrt{5}$

$a_2=\sqrt{80}=\sqrt{16.5}=4\sqrt{5}, a_1=\sqrt{20}=\sqrt{4.5}=2\sqrt{5}$

37) Un alambre de 40cm de longitud…

El primer dato que nos dan es sobre la suma de las 2 áreas: $3y^2+x^2=55,75cm^2$ donde x es el ancho del cuadrado e y es el ancho del rectángulo.

El segundo dato que tenemos que deducir es la suma del perímetro de ambas figuras, es la longitud total del alambre inicial: $8y+4x=40cm \rightarrow 2y+x=10$

Ya con estos dos datos podemos armar nuestro sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3y^2+x^2=55,75 \\ 2y+x=10 \end{cases}$$

Despejamos x en función de y: $x=10-2y$ reemplazamos en la otra ecuación:

$$3y^2+(10-2y)^2=55,75 \rightarrow 3y^2+100-40y+4y^2=55,75$$

$$7y^2-40y+44,25=0 \rightarrow y_1=\frac{59}{14}, y_2=1,5$$

Mientras que $x_1=\frac{11}{7}, x_2=7$

Ya con esto podemos saber dónde se cortó el alambre: Para $x_2=7$ que es el ancho del cuadrado, basta multiplicarlo por 4, y nos da 28cm. Si tomamos $x_1=\frac{11}{7}$ volvemos a multiplicar por 4, $\frac{44}{7}$ que es el perímetro del cuadrado, si se lo quitamos al alambre: $40cm-\frac{44}{7}=\frac{236}{7}cm$